BAB 4

Transformasi

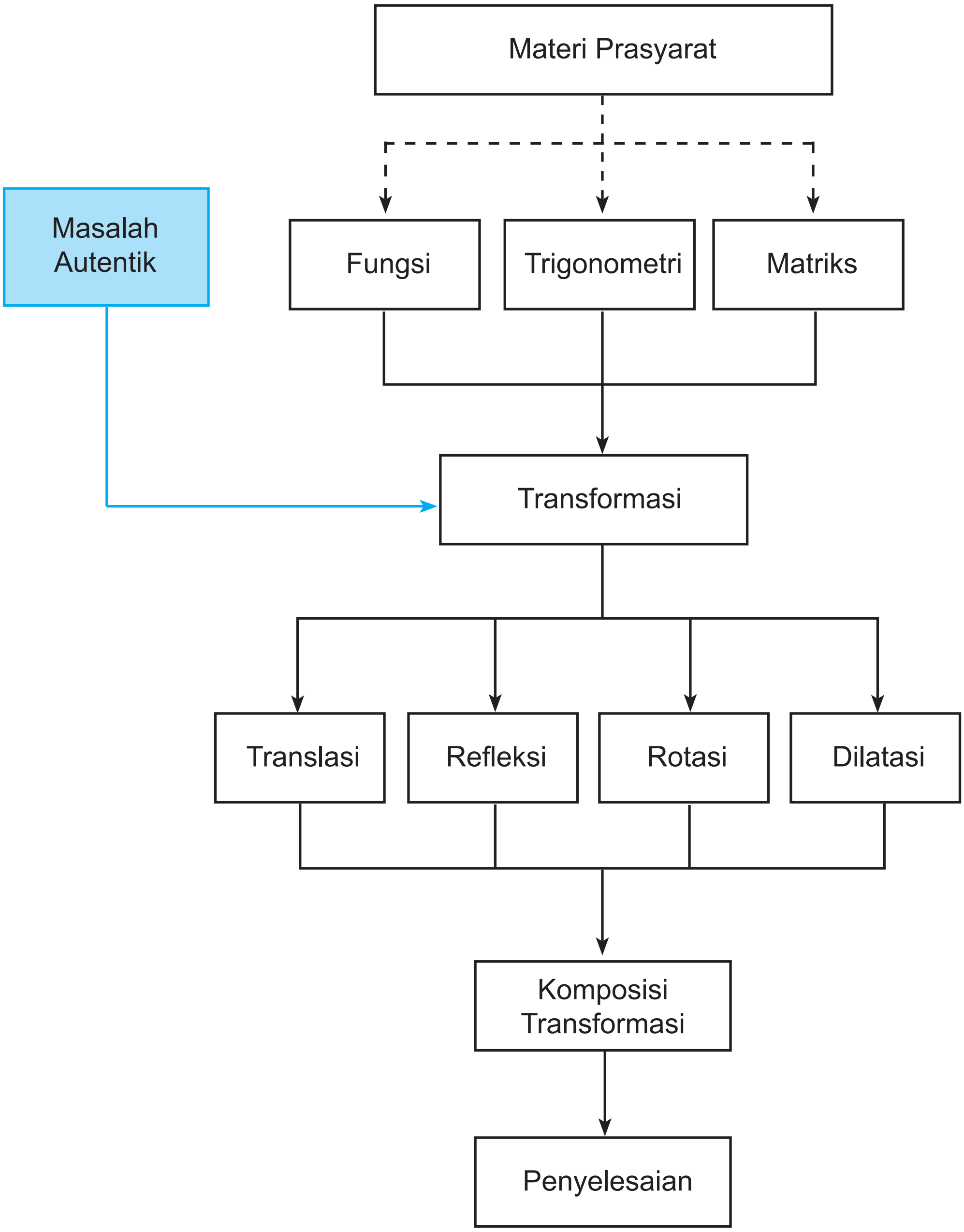
A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran transformasi, siswa mampu: 3.5 Menganalisis dan membandingkan transformasi dan komposisi transformasi dengan menggunakan matriks. 4.5 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri (translasi, refleksi, dilatasi, dan rotasi).	Melalui pembelajaran materi transformasi, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Mampu berpikir kreatif. • Mampu berpikir kritis dalam mengamati permasalahan. • Mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep. • Mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi permasalahan. • Mengajak siswa untuk menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari. • Siswa mampu memodelkan permasalahan.

Istilah Penting

- Translasi
- Refleksi
- Rotasi
- Dilatasi
- Komposisi Transformasi

B. Diagram Alir



C. Materi Pembelajaran

Pada bab ini, kita akan membahas konsep transformasi seperti translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian) serta komposisinya dengan pendekatan koordinat. Untuk mempelajari materi ini, kamu diharapkan sudah memahami konsep matriks dan mengingat kembali materi transformasi yang telah kamu pelajari di SMP.

4.1 Menemukan Konsep Translasi (Pergeseran)

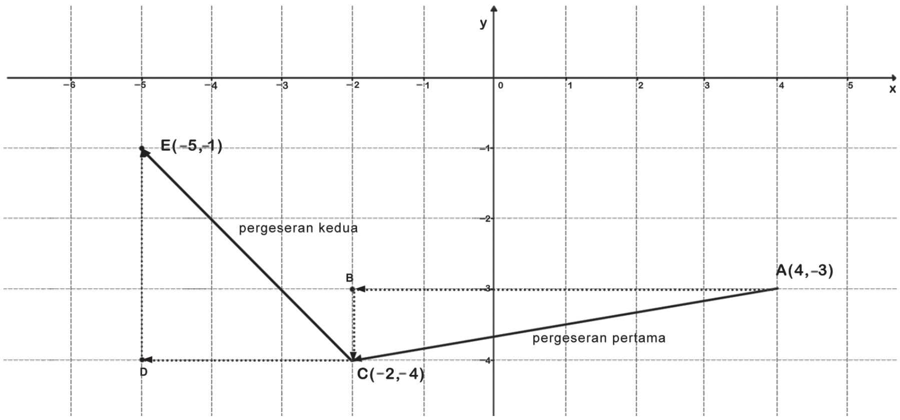
Coba kamu amati benda-benda yang bergerak di sekitar kamu. Benda-benda tersebut hanya berubah posisi tanpa mengubah bentuk dan ukuran. Sebagai contoh, kendaraan yang bergerak di jalan raya, pesawat terbang yang melintas di udara, bahkan diri kita sendiri yang bergerak kemana saja. Nah, sekarang kita akan membahas pergerakan objek tersebut dengan pendekatan koordinat. Kita asumsikan bahwa pergerakan ke arah sumbu x positif adalah ke kanan, pergerakan ke arah sumbu x negatif adalah ke kiri, pergerakan ke arah sumbu y positif adalah ke atas, dan pergerakan ke arah sumbu y negatif adalah ke bawah.

Masalah 4.1

Titik $A(4,-3)$ bergerak ke kiri 6 langkah dan ke bawah 1 langkah, kemudian dilanjutkan kembali bergerak ke kiri 3 langkah dan ke atas 3 langkah. Coba kamu sketsa pergerakan titik tersebut pada bidang koordinat kartesius. Dapatkah kamu temukan proses pergerakan titik tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Bila Masalah 4.1 disajikan dalam koordinat kartesius maka diperoleh gambar berikut. Perhatikan gambar!



Gambar 4.1: Pergeseran Titik $A(4, -3)$

Keterangan gambar:

Pergeseran 1. Posisi awal titik adalah $A(4,-3)$, kemudian bergerak ke kiri 6 langkah dan ke bawah 1 langkah, sehingga posisi berubah di koordinat $C(-2,-4)$. Hal ini berarti:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

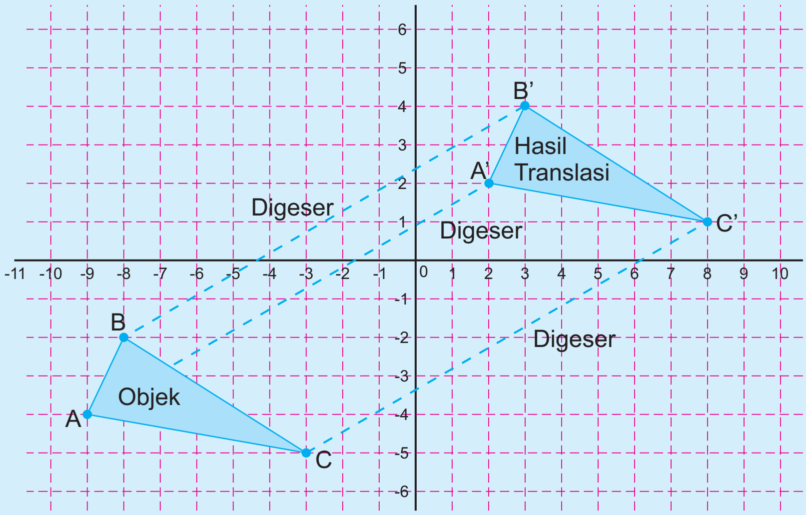
Pergeseran 2. Posisi sementara titik adalah $C(-2,-4)$ dan mengalami pergeseran selanjutnya yaitu bergeser ke kiri 3 langkah dan ke atas 3 langkah, sehingga pada gambar tampak di posisi koordinat $E(-5,-1)$. Hal ini berarti:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi akhir titik $A(4,-3)$ berada di titik $E(-5,-1)$.

Masalah 4.2

Bagaimana, jika sebuah bidang digeser pada bidang koordinat kartesius? Coba kamu amati bidang Segitiga *ABC* yang digeser pada gambar berikut! Dapatkah kamu tentukan arah dan besar pergeserannya?



Gambar 4.2: Translasi segitiga *ABC* pada koordinat kartesius

Alternatif Penyelesaian:

Tampak pada gambar arah pergeseran titik A, B, dan C ke posisi titik A', B' dan C'. Secara analitik, semua titik-titik pada bidang segitiga tersebut akan ikut bergeser, bukan? Mari kita tentukan arah dan besar pergeseran bidang tersebut.

Posisi awal titik adalah $A(-9, -4)$, $B(-8, -2)$ dan $C(-3, -5)$, kemudian masing-masing bergeser ke kanan 11 langkah dan ke atas 6 langkah, sehingga posisi berubah dikoordinat $A'(2, 2)$, $B'(3, 4)$ dan $C'(8, 1)$ sesuai gambar. Hal ini dapat dituliskan sebagai:

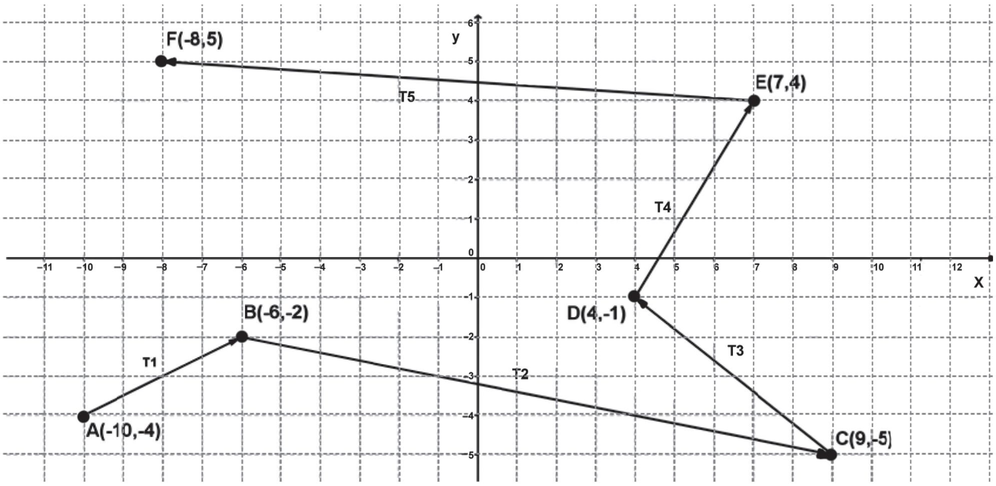
$$\begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$$

Berdasarkan pengamatan pada pergeseran objek-objek di sekitar kita dan pergeseran objek-objek di bidang koordinat kartesius (Masalah 4.1 dan Masalah 4.2), dapat disimpulkan sifat translasi berikut:

Sifat 4.1

Bangun yang digeser (translasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Selanjutnya, kita akan menemukan konsep translasi dan kaitannya dengan konsep matriks. Kita amati kembali pergeseran titik-titik pada Masalah 4.1 dan Masalah 4.2 serta pada gambar berikut:



Gambar 4.3: Translasi titik A pada koordinat kartesius

Amati pergeseran setiap titik pada Gambar 4.3! Perhatikan arah pergeseran titik-titik tersebut! Kita tentukan koordinat masing-masing titik dan menuliskannya pada tabel di bawah ini. Coba kamu lengkapi Tabel 4.1!

Tabel 4.1: Translasi titik

Titik awal	Titik akhir	Proses	Translasi
$A(-10, -4)$	$B(-6, -2)$	$\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10\\-4\end{pmatrix}$	$T_1\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$
$B(-6, -2)$	$C(9, -5)$	$\begin{pmatrix}9\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$	$T_2\begin{pmatrix}15\\-3\end{pmatrix}$

$C(\ldots, \ldots)$	$D(\ldots, \ldots)$	...	...
$D(\ldots, \ldots)$	$E(\ldots, \ldots)$	...	...
$E(\ldots, \ldots)$	$F(\ldots, \ldots)$	...	...

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum diperoleh konsep:

Titik $A(x, y)$ ditranslasi oleh $T(a, b)$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Mari kita gunakan konsep translasi tersebut untuk menentukan hasil translasi titik dan fungsi $y = f(x)$ pada beberapa contoh berikut.

Contoh 4.1

Titik $A(2, 3)$ ditranslasikan dengan matriks translasi $T(-3, 4)$, tentukan bayangan A!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(2,3) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bayangan A adalah $A'(-1, 7)$

Contoh 4.2

Garis k dengan persamaan $2x - 3y + 4 = 0$ ditranslasi dengan matriks translasi $T(-1, -3)$. Tentukanlah bayangan garis k tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan k sedemikian sehingga:

$$A(x,y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}$$

$$x' = x - 1 \Leftrightarrow x = x' + 1$$

$$y' = y - 3 \Leftrightarrow y = y' + 3$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis k maka ditemukan persamaan garis k setelah ditranslasi, yaitu

$2(x+1) - 3(y+3) + 4 = 0$ atau $2x - 3y - 3 = 0$

Latihan 4.1

Titik $P(a, b + 2)$ digeser dengan $T(3, 2b-a)$ sehingga hasil pergeseran menjadi $Q(3a + b, -3)$. Tentukan posisi pergeseran titik $R(2, 4)$ oleh translasi T di atas.

Alternatif penyelesaian:

Coba ikuti panduan berikut:

Langkah 1:

$$P(a, b+2) \xrightarrow{T(3,2b-a)} Q(3a+b, -3)$$

$$\begin{pmatrix}3a+b\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$$

$3a + b = \dots$ atau $a = \dots$ (persamaan 1)

$-3 = \dots$ (persamaan 2)

Langkah 2:
Dengan mensubstitusi a = ... ke persamaan (2) maka diperoleh nilai b = . . .
Dengan demikian, translasi yang dimaksud adalah $T(3,2b–a) = T(..., ...)$.

Langkah 3:
Pergeseran titik $R(2,4)$ oleh translasi T adalah:

$$R(2,4) \xrightarrow{T(\ldots,\ldots)} R'(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

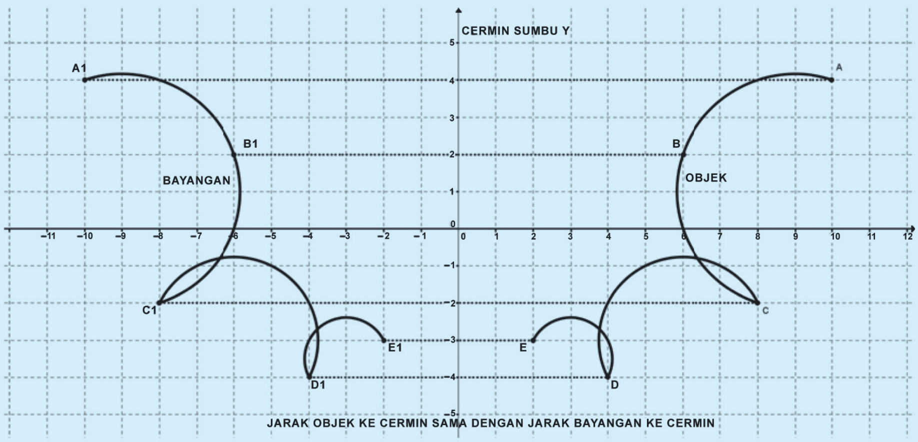
Jadi, koordinat pergeseran titik R adalah $R'(..., ...)$.

4.2 Menemukan Konsep Refleksi (Pencerminan)

Setelah kamu menemukan konsep translasi, kamu akan belajar menemukan konsep refleksi atau pencerminan. Kita mulai dengan mengamati pencerminan objek-objek dalam kehidupan sehari-hari. Coba kamu amati dirimu pada saat bercermin (pada cermin datar). Tentu saja, kamu pernah melihat bayangan dirimu di cermin, seperti contoh bayangan dirimu di permukaan air, bayangan dirimu di kaca, dan lain-lain. Kalau kamu amati, jarak dirimu ke cermin akan sama dengan jarak bayanganmu ke cermin. Sekarang, kita juga akan mencoba mempelajari konsep pencerminan dengan pendekatan koordinat. Kita akan mengamati pencerminan objek pada bidang koordinat, dengan itu diasumsikan bahwa titik $O(0,0)$ dan garis (sumbu x, sumbu y, $y = x$, $y = –x$) adalah sebagai cermin.

Masalah 4.3

Perhatikan gambar berikut! Coba kamu amati objek yang dicerminkan terhadap sumbu y pada bidang koordinat kartesius. Kamu terfokus pada jarak objek ke cermin dan jarak bayangan ke cermin serta bentuk/ukuran objek dan bayangan.



Gambar 4.4: Refleksi objek terhadap sumbu y

Apakah hasil pengamatanmu? Tentu saja, bentuk dan ukuran objek dan bayangannya tidak berubah, jarak objek ke cermin sama dengan jarak bayangannya ke cermin. Berdasarkan pengamatan pada Masalah 4.3 maka secara induktif diperoleh sifat pencerminan sebagai berikut.

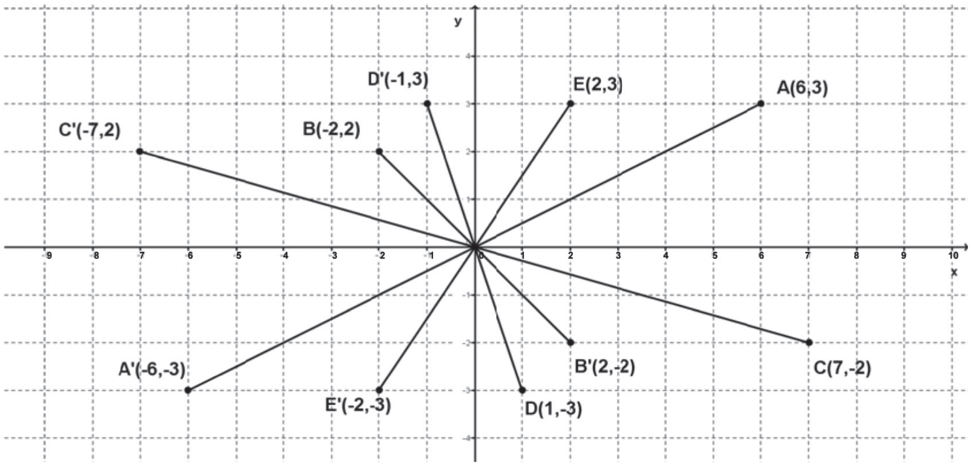
Sifat 4.2

Bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.

Perhatikan konsep-konsep pencerminan dengan pendekatan koordinat berikut ini.

4.2.1 Pencerminan Terhadap Titik *O*(0,0)

Kita akan menemukan konsep pencerminan terhadap titik $O(0,0)$ dengan melakukan eksperimen. Kamu amati pencerminan titik-titik pada gambar berikut.



Gambar 4.5: Refleksi titik terhadap titik $O(0,0)$

Perhatikan koordinat titik dan bayangannya setelah dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ pada gambar berikut tersebut! Tuliskan koordinat titik-titik tersebut dan bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.2: Koordinat pencerminan titik terhadap titik $O(0,0)$

Titik	Koordinat Bayangan
$A(6,3)$	$A'(-6,-3)$
$B(\ldots , \ldots)$	$B'(\ldots , \ldots)$
$C(\ldots , \ldots)$	$D'(\ldots , \ldots)$
$D(\ldots , \ldots)$	$E'(\ldots , \ldots)$
$E(\ldots , \ldots)$	$F'(\ldots , \ldots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x,y)$ dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ akan mempunyai koordinat bayangan $A'(-x,-y)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap titik O(0,0). Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(-x,-y)$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$$-x = ax + by \Leftrightarrow a = -1 \text{ dan } b = 0$$

$$-y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0 \text{ dan } d = -1$$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap titik $O(0,0)$ adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 4.3

Titik $A(1, 4)$ dicerminkan terhadap titik asal $O(0, 0)$, tentukan bayangan A!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(1,4) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Bayangan A adalah $A'(-1, -4)$

Contoh 4.4

Sebuah garis dengan persamaan $-2x + 4y - 1 = 0$ dicerminkan terhadap titik asal $O(0, 0)$. Tentukan persamaan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $-2x + 4y - 1 = 0$ sedemikian sehingga:

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

$$y' = -y \Leftrightarrow y = -y'$$

Jika x dan y disubstitusi ke garis maka ditemukan bayangannya yaitu:

$-2(-x) + 4(-y) -1 = 0$ atau $2x - 4y - 1 = 0$

Latihan 4.2

Titik $A(2, -3)$ ditranslasikan dengan $T(-4, -5)$ kemudian dicerminkan terhadap titik O. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

$$A(2,-3) \xrightarrow{T_{(-4,-5)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses translasi)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

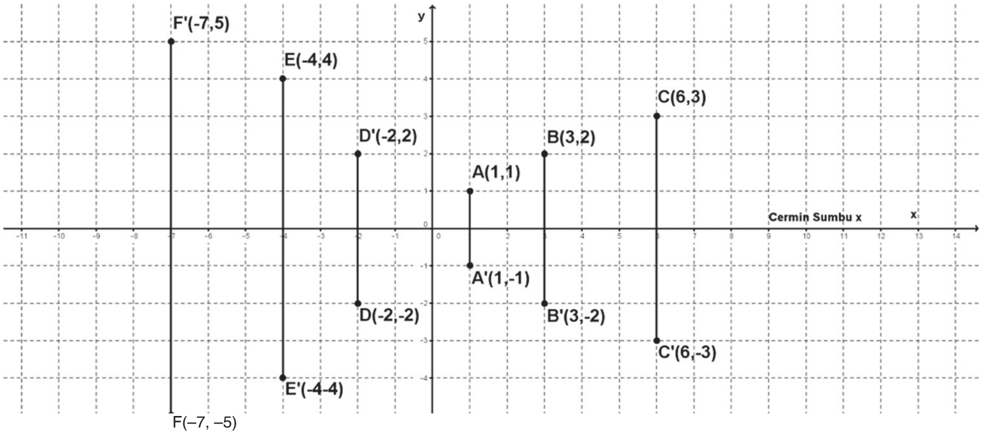
Langkah 2 (Proses Refleksi)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A''(\ldots, \ldots)$

4.2.2 Pencerminan Terhadap Sumbu *x*

Kita akan mencoba menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu *x* dengan melakukan pengamatan pada pencerminan titik-titik. Secara induktif, kita akan menemukan pola. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 4.6: Refleksi titik terhadap sumbu *x*

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap sumbu *x* pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.3: Koordinat pencerminan titik terhadap sumbu *x*

Titik	Koordinat Bayangan
$A(1, 1)$	$A'(1, -1)$
$B(\dots , \dots)$	$B'(\dots , \dots)$
$C(\dots , \dots)$	$C'(\dots , \dots)$
$D(\dots , \dots)$	$D'(\dots , \dots)$
$E(\dots , \dots)$	$E'(\dots , \dots)$
$F(\dots , \dots)$	$F'(\dots , \dots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum, jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x akan mempunyai koordinat bayangan $A'(x, -y)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap sumbu x. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{Sumbu\ x} A'(x, -y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks:

$x = ax + by \Leftrightarrow a = 1$ dan $b = 0$

$-y = cx + dy \Leftrightarrow c = 0$ dan $d = -1$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap sumbu x adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perhatikan penerapan konsep pencerminan terhadap sumbu x pada contoh berikut!

Contoh 4.5

Jika titik $A(-3, 3)$ dicerminkan terhadap sumbu x maka tentukan bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-3,3) \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(-3, -3)$

Contoh 4.6

Jika garis $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$x' = x \Leftrightarrow x = x'$

$y' = -y \Leftrightarrow y = -y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $3(x) - 2(-y) - 5 = 0$ atau $3x + 2y - 5 = 0$

Latihan 4.3

Titik A(–2, –5) dicerminkan terhadap titik O kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu x. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-2,-5) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses Refleksi terhadap titik O)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

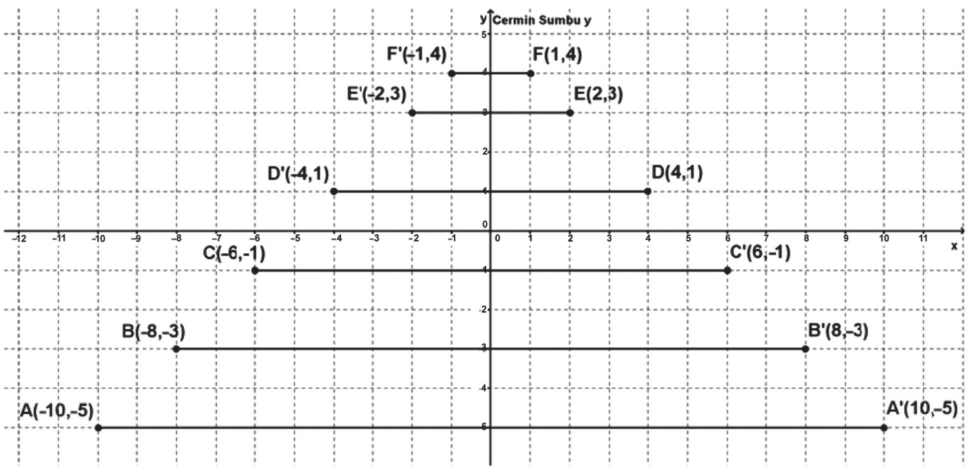
Langkah 2 (Proses Refleksi terhadap sumbu x)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A''(\ldots, \ldots)$

4.2.3 Pencerminan Terhadap Sumbu *y*

Kembali kita akan mengamati pola koordinat titik-titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu y. Dengan demikian, kita akan menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu y. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 4.7: Refleksi titik terhadap sumbu *y*

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap sumbu *y* pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.4: Koordinat pencerminan titik terhadap sumbu y

Titik	Koordinat Bayangan
$A(-10, -5)$	$A'(10, -5)$
$B(\ldots , \ldots)$	$B'(\ldots , \ldots)$
$C(\ldots , \ldots)$	$C'(\ldots , \ldots)$
$D(\ldots , \ldots)$	$D'(\ldots , \ldots)$
$E(\ldots , \ldots)$	$E'(\ldots , \ldots)$
$F(\ldots , \ldots)$	$F'(\ldots , \ldots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y akan mempunyai koordinat bayangan $A'(-x, y)$. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(-x, y)$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$-x = ax + by \Leftrightarrow a = \ldots.$ dan $b = \ldots.$

$y = cx + dy \Leftrightarrow c = \ldots.$ dan $d = \ldots.$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap sumbu y adalah $\begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 4.7

Jika titik $A(-3, -4)$ dicerminkan terhadap sumbu y maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-3,-4)\xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(3,-4)$

Contoh 4.8

Jika garis $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu y maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga,

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x'$$

$$y' = y \Leftrightarrow y = y'$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $3(-x) - 2(y) - 5 = 0$ atau $3x + 2y + 5 = 0$

Latihan 4.4

Garis $2x - y + 5 = 0$ dicerminkan terhadap titik $O(0,0)$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu y. Tentukan persamaan bayangan garis tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ terletak pada garis tersebut, sehingga:

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{O(0,0)}}A'(x',y')\xrightarrow{C_{sumbu\ y}}A''(x'',y'')$$

Langkah 1 (Proses pencerminan terhadap titik $O(0, 0)$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses pencerminan terhadap sumbu y)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

sehingga:

$x'' = \ldots$ dan $y'' = \ldots$

Langkah 4 (Proses menentukan persamaan bayangan)

Tentukan x dan y dalam bentuk x dan y

$x = \ldots$ dan $y = \ldots$

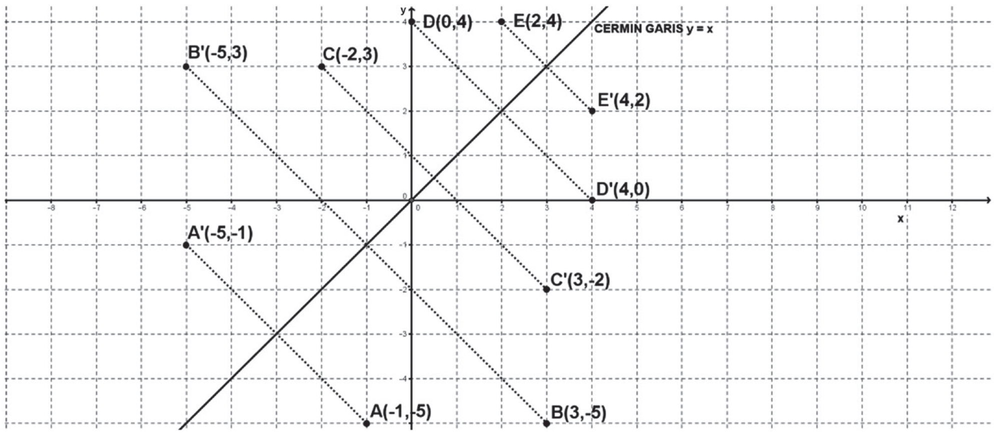
Langkah 5 (Proses menentukan persamaan bayangan)

Substitusi x dan y ke $2x - y + 5 = 0$ sehingga diperoleh persamaan bayangan.

$2(\ \ldots\ ) - (\ \ldots\ ) + 5 = 0$

4.2.4 Pencerminan Terhadap Garis $y = x$

Kita akan mencoba menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = x$ dengan melakukan pengamatan pada pencerminan titik-titik. Secara induktif, kita akan menemukan pola. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 4.8: Refleksi titik terhadap garis $y = x$

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap garis $y = x$ pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan koordinat titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.5: Koordinat pencerminan titik terhadap garis $y = x$

Titik	Koordinat Bayangan
$A(-1, -5)$	$A'(-5, -1)$
$B(\ldots , \ldots)$	$B'(\ldots , \ldots)$
$C(\ldots , \ldots)$	$C'(\ldots , \ldots)$
$D(\ldots , \ldots)$	$D'(\ldots , \ldots)$
$E(\ldots , \ldots)$	$E'(\ldots , \ldots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x,y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ akan mempunyai koordinat bayangan $A'(y, x)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap garis $y = x$. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(y, x)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$y = ax + by \Leftrightarrow a = 0$ dan $b = 1$

$x = cx + dy \Leftrightarrow c = 1$ dan $d = 0$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dimana matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Contoh 4.9

Jika titik $A(-1, 2)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-1,2) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(2, -1)$

Contoh 4.10

Jika garis $4x - 3y + 1 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $4x - 3y + 1 = 0$ sehingga,

$$A(x,y) \xrightarrow{C_{y=x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$x' = y \Leftrightarrow y = x'$

$y' = x \Leftrightarrow x = y'$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $4(y) - 3(x) + 1 = 0$ atau $-3(x) + 4y + 1 = 0$

Latihan 4.5

Titik $A(-1, -3)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$ kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu y dan dilanjutkan lagi dengan pencerminan terhadap garis $y = x$. Tentukan bayangan titik A tersebut.

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-1,-3) \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'(x',y') \xrightarrow{C_{sumbu\ y}} A''(x'',y'') \xrightarrow{C_{y=x}} A'''(x''',y''')$$

Langkah 1 (Proses pencerminan terhadap titik $O(0,0)$)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Langkah 2 (Proses pencerminan terhadap sumbu y)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

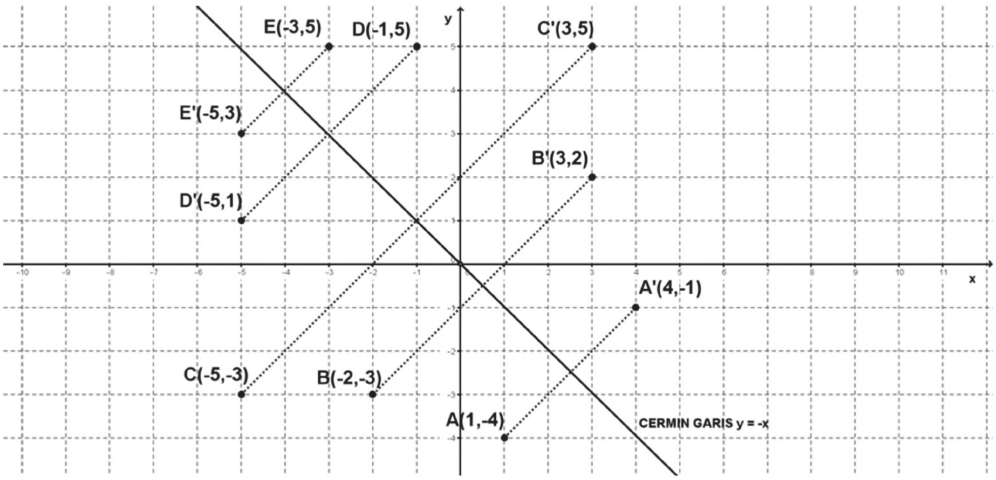
Langkah 3 (Proses pencerminan terhadap garis $y = x$)

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'''(\dots, \dots)$

4.2.5 Pencerminan Terhadap Garis $y = -x$

Kita akan mencoba menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = -x$ dengan melakukan pengamatan pada pencerminan titik-titik. Secara induktif, kita akan menemukan pola. Perhatikan gambar berikut!



Gambar 4.9: Pencerminan titik terhadap garis $y = -x$

Coba kamu amati pencerminan beberapa titik terhadap garis $y = -x$ pada koordinat kartesius di atas, kemudian kamu tuliskan koordinat titik tersebut beserta bayangannya pada tabel di bawah ini!

Tabel 4.6: Koordinat pencerminan titik terhadap garis $y = -x$

Titik	Bayangannya
$A(1, -4)$	$A'(4, -1)$
$B(\ldots , \ldots)$	$B'(\ldots , \ldots)$
$C(\ldots , \ldots)$	$C'(\ldots , \ldots)$
$D(\ldots , \ldots)$	$D'(\ldots , \ldots)$
$E(\ldots , \ldots)$	$E'(\ldots , \ldots)$

Berdasarkan pengamatan pada tabel, secara umum jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ akan mempunyai koordinat bayangan $A'(-y, -x)$, bukan? Mari kita tentukan matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$. Misalkan matriks transformasinya adalah $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga,

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{y=-x}}A'(-y,-x)$$

$$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks,

$-y = \ldots \Leftrightarrow a = \ldots$ dan $b = \ldots$

$-x = \ldots \Leftrightarrow c = \ldots$ dan $d = \ldots$

Dengan demikian, matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$.

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x,y)\xrightarrow{C_{y=-x}}A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 4.11

Jika titik $A(1, 2)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(1,2)\xrightarrow{C_{y=-x}}A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(-2,-1)$

Contoh 4.12

Jika garis $4x - 3y + 1 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ maka tentukan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik A(x,y) memenuhi persamaan $4x - 3y + 1 = 0$ sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_{y=-x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

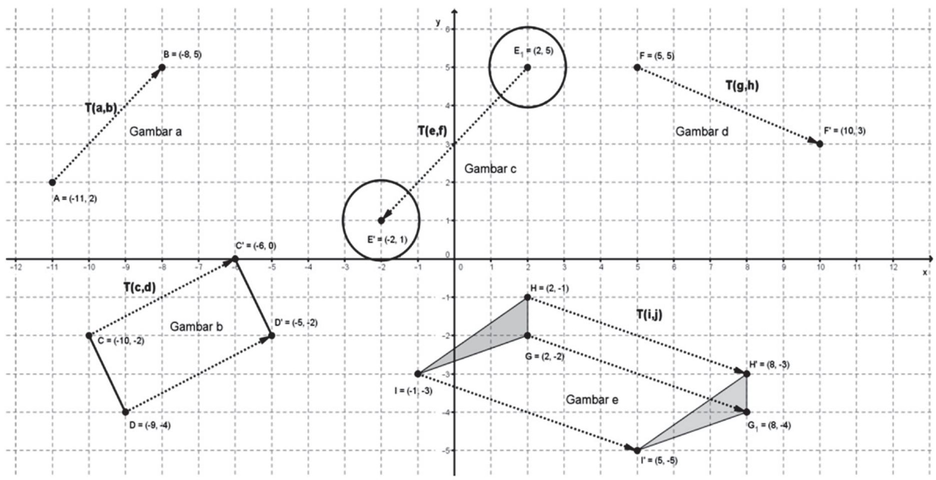
$$x' = -y \Leftrightarrow y = -x'$$

$$y' = -x \Leftrightarrow x = -y'$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $4(-y) - 3(-x) + 1 = 0$ atau $3x - 4y + 1 = 0$.

Uji Kompetensi 4.1

1. Perhatikan gambar!



Berdasarkan gambar, tentukan translasi T yang menggeser masing-masing objek tersebut!

2. Tunjukkan dengan gambar pada bidang koordinat kartesius, pergeseran objek berikut oleh translasi T:
   a. Titik $A(–3, –4)$ ditranslasi oleh $T(5, 7)$
   b. Ruas garis AB dengan $A(–1, 1)$ dan $B(2, –3)$ ditranslasi oleh $T(–2, 4)$
   c. Segitiga ABC dengan $A(–3, –1)$, $B(–1, 2)$, dan $C(0, –4)$ ditranslasi oleh $T(5, 5)$
   d. Garis $2y – 3x + 6 = 0$ ditranslasi oleh $T(4, –1)$
   e. Lingkaran dengan pusat di $P(1, –1)$ dan radius 2 satuan ditranslasi oleh $T(5, –5)$

3. Tentukan koordinat hasil pergeseran titik oleh translasi T berikut:
   a. Titik $A(–2, 5)$ oleh translasi $T_1(–1, –3)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(0, 5)$
   b. Titik $B(1, –3)$ oleh translasi $T_1(–2, –4)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(–2, –4)$
   c. Titik $C(–3, 2)$ oleh translasi $T_1(–1, 5)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(–1,4)$
   d. Titik $D(4, 5)$ oleh translasi $T_1(–1, –2)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(–1, –3)$
   e. Titik $D(1, 3)$ oleh translasi $T_1(1, 3)$ dilanjutkan dengan translasi $T_2(1, 3)$

4. Tentukan koordinat titik asal oleh translasi T berikut.
   a. Titik $A(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–1, –6)$ menjadi $A'(7, –4)$
   b. Titik $B(x, y)$ ditranslasi oleh $T(1, 5)$ menjadi $B'(–10, –2)$
   c. Titik $C(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–4, 6)$ menjadi $C'(10, –3)$
   d. Titik $D(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–5, –9)$ menjadi $D'(5, 9)$
   e. Titik $E(x, y)$ ditranslasi oleh $T(–1, –6)$ menjadi $E'(1, 6)$

5. Dengan menggunakan konsep, tentukan hasil pergeseran fungsi-fungsi berikut oleh translasi T.
   a. Garis $y = 2$ ditranslasi oleh $T(1, –1)$
   b. Garis $2y – 3x + 6 = 0$ ditranslasi oleh $T(4, –1)$
   c. Parabola $y = x^2 – 3x + 2$ ditranslasi oleh $T(2, 1)$
   d. Parabola $x = y^2 – 2x – 2$ ditranslasi oleh $T(–2, 2)$
   e. Lingkaran $x^2 + y^2 – 2x + 2y – 3 = 0$ ditranslasi oleh $T(–3, –2)$

6. Tunjukkan dengan gambar pencerminaan objek pada bidang koordinat kartesius berikut:
   a. Titik $A(3, –4)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$
   b. Titik $B(–1, –2)$ dicerminkan terhadap titik sumbu x
   c. Titik $C(–5, 2)$ dicerminkan terhadap titik sumbu y
   d. Titik $D(1, –5)$ dicerminkan terhadap titik sumbu $y = x$
   e. Titik $E(2, 4)$ dicerminkan terhadap titik sumbu $y = –x$
   f. Ruas garis AB dengan $A(–2, –1)$ dan $B(2, 5)$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$
   g. Segitiga ABC dengan $A(–3, –1)$, $B(–1, 2)$ dan $C(0, –4)$ dicerminkan terhadap sumbu x
   h. Garis $2y – 3x + 6 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu y
   i. Parabola $y = x^2 + 6$ dicerminkan terhadap garis $y = x$
   j. Garis $y = 2x + 3$ dicerminkan terhadap $y = –x$

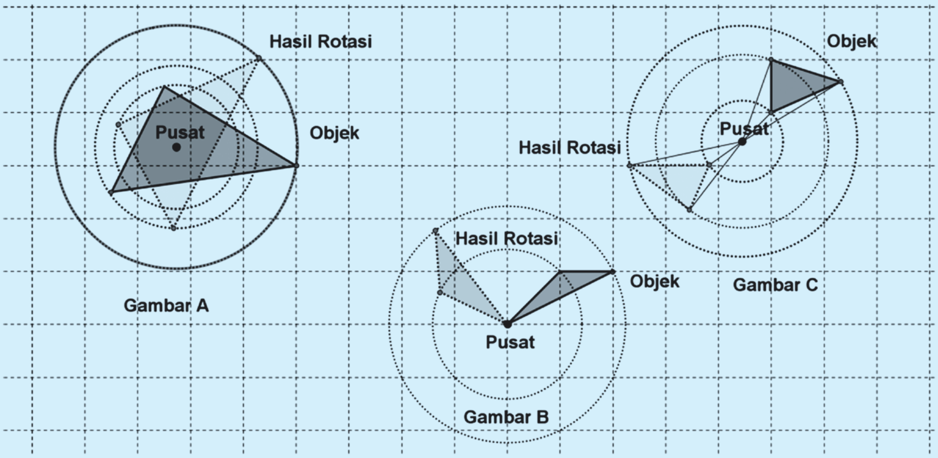
7. Dengan menggunakan konsep refleksi, tentukan hasil pencerminan fungsi-fungsi berikut!
   a. Garis $y = 2$ dicerminkan terhadap titik $O(0, 0)$
   b. Garis $2y – 3x + 6 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x.
   c. Parabola $y = x^2 – 3x + 2$ dicerminkan terhadap sumbu y.
   d. Parabola $x = y^2 – 2y – 2$ dicerminkan terhadap garis $y = x$.
   e. Lingkaran $x^2 + y^2 – 2x + 2y – 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = –x$.

4.3 Menemukan Konsep Rotasi (Perputaran)

Coba kamu amati lingkungan sekitarmu! Objek apa yang bergerak berputar? Banyak contoh objek yang bergerak berputar, seperti: jarum jam bergerak berputar menunjukkan angka, kincir angin, kipas angin, dan lain-lain. Pada kesempatan ini, kita akan membahas gerak berputar (rotasi) suatu objek dengan sudut putaran dan pusat putaran pada bidang koordinat. Perhatikan Gambar!

Masalah 4.4

Coba kamu perhatikan gambar berikut!

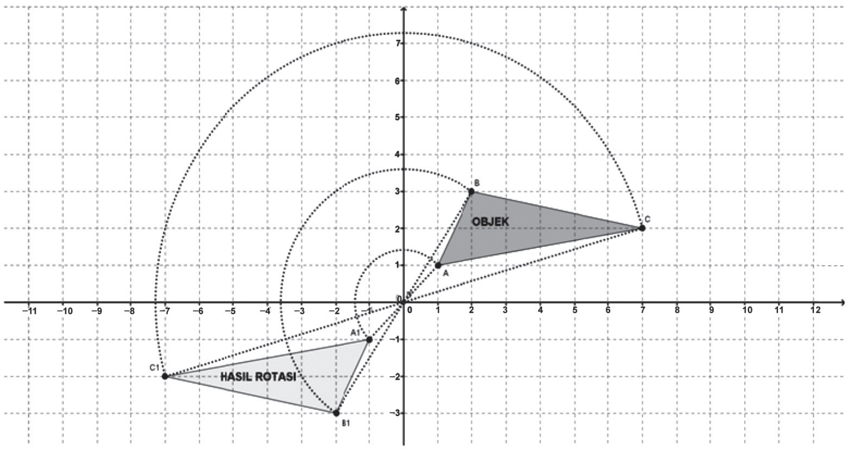


Gambar 4.10: Rotasi objek dengan pusat rotasi berbeda

Berikan komentarmu tentang perputaran setiap objek tersebut!

Pada gambar terdapat tiga objek (segitiga) yang diputar dengan sudut putaran tertentu. Hasil putaran akan bergantung pada pusat putaran dan besar sudut putaran, bukan. Gambar A adalah putaran objek dengan sudut putaran berada pada objek itu sendiri. Gambar B adalah putaran objek dengan pusat berada di ujung/pinggir objek itu sendiri dan Gambar C menunjukkan putaran objek dengan pusat putaran berada di luar objek itu. Namun, bentuk dan ukuran objek tidak berubah setelah mengalami rotasi.

Perhatikan gambar berikut!



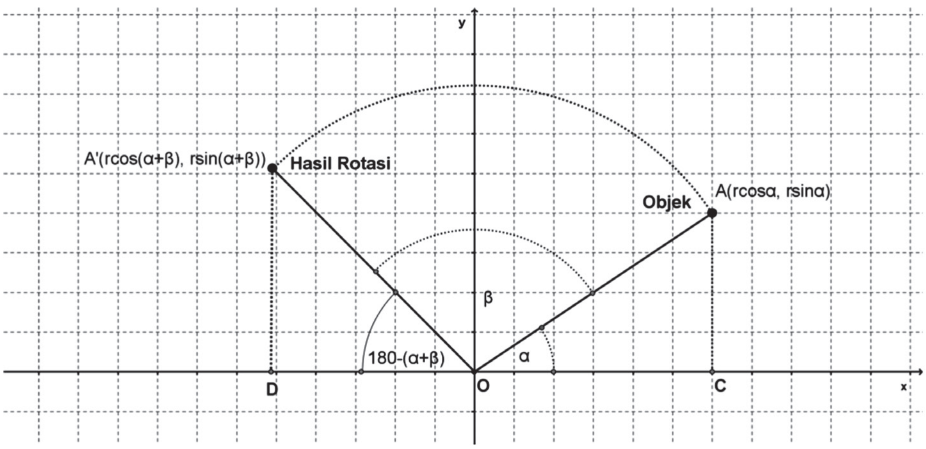
Gambar 4.11: Rotasi objek pada pusat $O(0,0)$

Dengan demikian, secara induktif diperoleh sifat rotasi sebagai berikut:

Sifat 4.3

Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Berikutnya, kita akan melakukan percobaan kembali untuk mendapatkan konsep rotasi. Perhatikan pergerakan titik pada gambar berikut:



Gambar 4.12: Rotasi Titik dengan sudut β dan Pusat $O(0,0)$

Kamu masih ingat konsep trigonometri, bukan? Pada segitiga *OCA*, koordinat objek adalah $A(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Diputar sebesar sudut β dan Pusat $O(0, 0)$ sehingga posisi objek menjadi di koordinat $A'(r \cos(\alpha + \beta), r \sin(\alpha + \beta))$. Dengan demikian, kita akan mencoba mencari konsep rotasi.

Misalkan matriks rotasi adalah $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{Rotasi} A'(x', y')$$

$$A(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \xrightarrow{Rotasi} A'(r\cos(\alpha+\beta), r\sin(\alpha+\beta))$$

$$\begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar\cos\alpha + br\sin\alpha \\ cr\cos\alpha + dr\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\alpha + b\sin\alpha \\ c\cos\alpha + d\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Ini berarti

$a = \cos\beta, b = -\sin\beta$ dan $c = \sin\beta, d = \cos\beta$

Dengan demikian, matriks rotasi sebesar sudut β dan pusat rotasi $O(0, 0)$ adalah

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Bagaimana jika pusat rotasi di titik $P(p, q)$? Kamu boleh menggeser (translasi) terlebih dahulu pusat rotasi ke titik $O(0, 0)$ kemudian terjadi proses rotasi kemudian ditranslasi kembali sejauh pusat rotasi sebelumnya.

Titik $A(x, y)$ diputar dengan pusat $P(p, q)$ dan sudut α menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[P(p,q),\alpha]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Matriks rotasi dengan sudut α (berlawanan arah jarum jam) adalah $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ingat, sudut α dihitung berlawanan arah jarum jam, sebaliknya adalah –α (searah jarum jam).

Contoh 4.13

Jika titik $A(-2, 3)$ dirotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut 90^0 berlawanan arah jarum jam maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-2,3) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90^\circ]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(-3,-2)$

Contoh 4.14

Jika garis $x - 2y + 3 = 0$ dirotasi dengan pusat $P(1, -1)$ dan sudut 180^0 searah jarum jam maka tentukanlah bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $x - 2y + 3 = 0$ sehingga,

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[P(1,-1),-180^\circ]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-180^\circ) & -\sin(-180^\circ) \\ \sin(-180^\circ) & \cos(-180^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y-2 \end{pmatrix}$$

$x' = -x + 2 \Leftrightarrow x = 2 - x'$

$y' = -y - 2 \Leftrightarrow y = -y' - 2$

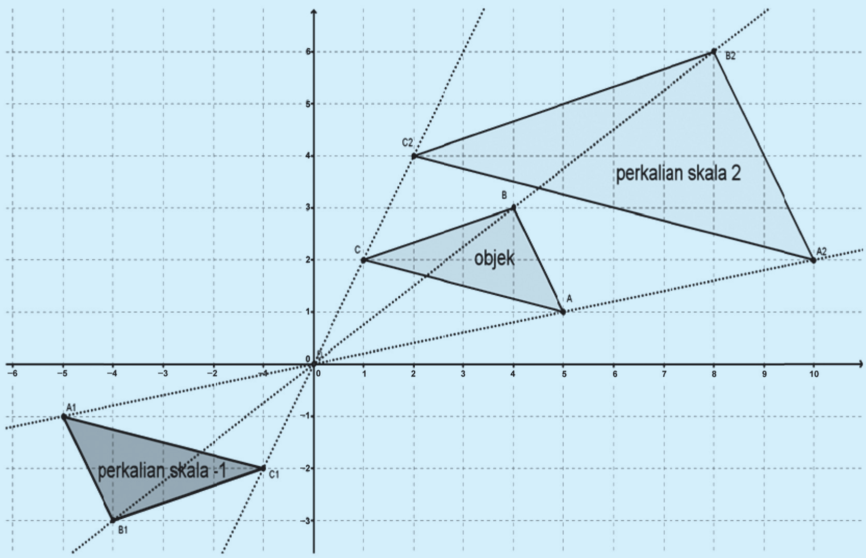
Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $(2 - x) - 2(-y - 2) + 3 = 0$ atau $x - 2y - 9 = 0$.

4.4 Menemukan Konsep Dilatasi (Perkalian)

Coba kamu berikan contoh perkalian (dilatasi) yang terjadi di lingkungan sekitarmu? Sebagai contoh, balon yang ditiup akan mengembang, karet gelang dapat direnggang, dan lain-lain. Semua itu membicarakan perkalian ukuran objek. Tetapi, pada kesempatan ini, kita akan membahas konsep perkalian objek dengan pendekatan koordinat.

Masalah 4.5

Coba amati gambar berikut. Berikan pendapatmu?



Gambar 4.13: Dilatasi objek pada pusat $O(0, 0)$

Jika diamati, kamu melihat ukuran objek akan semakin besar dengan perkalian skala 2. Kemudian, jarak OA2 adalah dua kali OA, jarak OB2 adalah dua kali OB dan jarak OC2 adalah dua kali OC. Tetapi bangun setelah perkalian dengan faktor skala –1 mempunyai besar dan ukuran yang sama tetapi mempunyai arah yang berlawanan. Perhatikan juga, jarak OA1 sama dengan jarak OA, jarak OB1 adalah sama dengan jarak OB dan jarak OC1 adalah sama dengan jarak OC.

Hal ini berarti, untuk melakukan perkalian/dilatasi, dibutuhkan unsur faktor perkalian dan pusat perkalian.

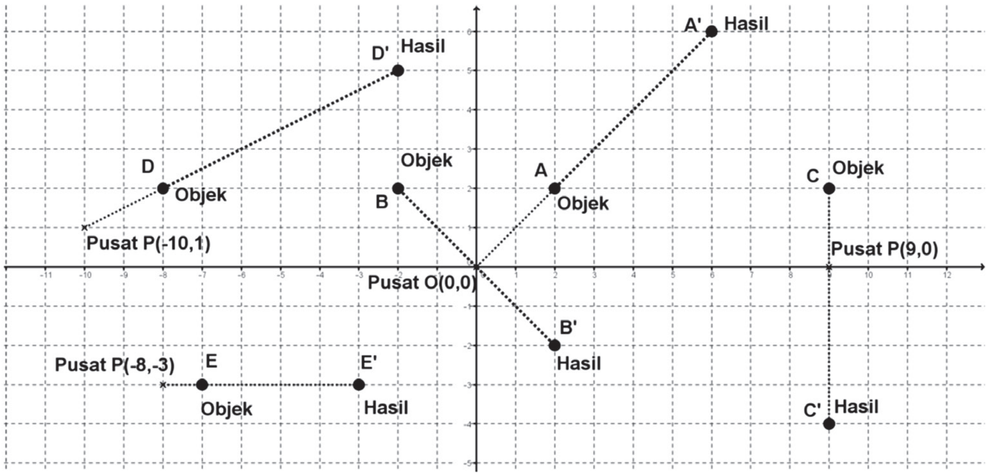
Dengan mengamati perkalian objek, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

Sifat 4.4

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.
- Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Berikutnya, amati dilatasi titik-titik pada gambar berikut.



Gambar 4.14: Dilatasi titik dengan pusat $P(a, b)$

Kamu amati titik pusat, objek, dan hasil dilatasi objek. Amati juga jarak objek ke pusat dan jarak hasil dilatasi ke pusat pada bidang koordinat di atas.

Coba kamu lengkapi tabel berikut dan tentukan pola atau konsep melalui langkah-langkah berikut!

Tabel 4.7: Dilatasi titik pada pusat $P(a, b)$ dan skala k

No.	Pusat	Objek	Hasil	Pola
1.	$P(0, 0)$	$A(2, 2)$	$A'(6, 6)$	$\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}=3\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
2.	$P(0, 0)$	$B(-2, 2)$	$B'(\ldots,\ldots)$	...
3.	$P(9, 0)$	$C(\ldots,\ldots)$	$C'(9, -4)$	...
4.	$P(-10, 1)$	$D(-8, 2)$	$D'(-2, 5)$	$\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=4\left(\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}$
5.	$P(-8, -3)$	$E(\ldots,\ldots)$	$E'(\ldots,\ldots)$	...

Secara indukif, diperoleh kesimpulan berikut:

Titik $A(x, y)$ didilatasi dengan pusat $P(p, q)$ dan skala k menghasilkan bayangan $A'(x', y')$, ditulis dengan,

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[P(p,q),k]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Contoh 4.15

Jika titik $A(-2, 3)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan skala 3 maka tentukanlah bayangan titik tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(-2, 3) \xrightarrow{D_{[O(0,0),3]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(-6, 9)$

Contoh 4.16

Jika garis $2x - 4y + 3 = 0$ didilatasi dengan pusat $P(1, -1)$ dan skala -2 maka tentukanlah bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $2x - 4y + 3 = 0$ sehingga,

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[P(1,-1),-2]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+3 \\ -2y-3 \end{pmatrix}$$

$$x' = -2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{3-x'}{2}$$

$$y' = -2y - 3 \Leftrightarrow y = \frac{-3-y'}{2}$$

Dengan mensubstitusi x dan y ke garis maka ditemukan bayangannya, $2(\frac{3-x}{2})-4(\frac{-3-y}{2})+3=0$ atau $-x+2y+12=0$

Uji Kompetensi 4.2

1. Tentukan koordinat titik-titik oleh rotasi R dengan sudut α dan pusat P serta arah rotasi sebagai berikut:

No.	Titik	Sudut	Arah	Pusat
a.	$A(2, 1)$	$\alpha = 90^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(0, 0)$
b.	$B(-1, 3)$	$\alpha = 90^0$	Searah jarum jam	$P(1, 1)$
c.	$C(-2, -1)$	$\alpha = 180^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(2, -1)$
d.	$D(3, -5)$	$\alpha = 270^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(-2, 3)$
e.	$E(2, 2)$	$\alpha = 45^0$	Searah jarum jam	$P(-1, -2)$

2. Tentukan bentuk persamaan oleh dilatasi R dengan sudut α dan pusat P serta arah rotasi sebagai berikut:

No.	Fungsi	Sudut	Arah	Pusat
a.	$2y-3x+6=0$	$\alpha = 90^0$	Searah jarum jam	$P(0, 0)$
b.	$3y-4x-6=0$	$\alpha = 90^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(1, 1)$
c.	$y = x^2-2x+6$	$\alpha = 180^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(2, -1)$
d.	$y = -2x^2-x+2$	$\alpha = 270^0$	Berlawanan arah jarum jam	$P(-2, 3)$
e.	$x^2+y^2-4=0$	$\alpha = 45^0$	Searah jarum jam	$P(-1, -2)$

3. Tentukan koordinat titik-titik oleh dilatasi D dengan skala k dan pusat P berikut:

No.	Titik	Skala	Pusat
a.	$A(2, 1)$	$k = 2$	$P(0, 0)$
b.	$B(-1, 3)$	$k = -2$	$P(1, 1)$
c.	$C(-2, -1)$	$k = 3$	$P(2, -1)$
d.	$D(3, -5)$	$k = -1$	$P(-2, 3)$
e.	$E(2, 2)$	$k = 2$	$P(-1, -2)$

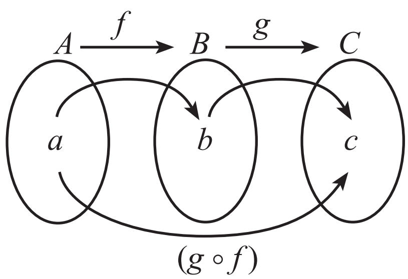
4. Tentukan bentuk persamaan oleh dilatasi D dengan skala k dan pusat P berikut:

No.	Fungsi	Skala	Pusat
a.	$2y - 3x + 6 = 0$	$k = 2$	$P(0, 0)$
b.	$3y - 4x - 6 = 0$	$k = -2$	$P(1, 1)$
c.	$y = x^2 - 2x + 6$	$k = 3$	$P(2, -1)$
d.	$y = -2x^2 - x + 2$	$k = -1$	$P(-2, 3)$
e.	$x^2 + y^2 - 4 = 0$	$k = 2$	$P(-1, -2)$

5. Titik $A(2, 3)$ di rotasi sejauh 270^0 pada pusat $O(0, 0)$ kemudian dilanjutkan dengan dilatasi pada skala –2 dengan pusat dilatasi $P(1, -1)$. Sketsa transformasi tersebut dan tentukan koordinat akhir titik A.

4.5 Komposisi Transformasi

Selanjutnya, kita akan membahas komposisi transformasi. Ingat, transformasi merupakan fungsi sehingga konsep komposisi transformasi sama halnya dengan komposisi fungsi pada umumnya yang telah kamu pelajari sebelumnya di kelas X.



Gambar 4.15 Fungsi komposisi $(g \circ f)$

Berdasarkan gambar di atas, fungsi f memetakan anggota domain ke tepat satu anggota kodomain pertama (Himpunan B), kemudian fungsi g akan melanjutkan pemetaan ke anggota kodomain kedua (Himpunan C). Sementara fungsi komposisi $(g \circ f)$ akan memetakan anggota domain (Himpunan A) secara langsung ke kodomain kedua (Himpunan C). Sekarang, bagaimana jika fungsinya berupa transformasi geometri seperti translasi, refleksi, rotasi dan dilatasi? Coba kamu pahami masalah berikut:

Masalah 4.6

Misalkan sembarang titik $A(x, y)$ ditranslasikan dengan $T_1(a_1, b_1)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(a_2, b_2)$. Tentukan koordinat akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Sesuai dengan konsep translasi, maka persoalan ini dapat diselesaikan secara bertahap.Namun, proses translasi bertahap ini dapat melahirkan konsep komposisi translasi. Coba kamu amati!

$$A(x, y) \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}} A'(x', y') \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}} A''(x'', y'')$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ dimana } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{T_2} + M_{T_1} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{T_2 \circ T_1} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{dimana, } M_{T_2 \circ T_1} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Proses komposisi translasi tersebut dapat kamu lihat pada skema berikut:

$$\begin{tikzcd}
A'(x', y') \arrow[r, "T_2\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}"] & A''(x'', y'') \\
A(x, y) \arrow[u, "T_1\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}"] \arrow[ur, "(T_2 \circ T_1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Skema 4.1 Komposisi Translasi

Secara umum, matriks komposisi translasi dituliskan sebagai berikut:

Jika matriks translasi T_1 adalah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan matriks translasi T_2 adalah $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ maka matriks komposisi translasi $T_1 \circ T_2$ atau $T_2 \circ T_1$ dituliskan,

$$M_{T_1 \circ T_2} = M_{T_1} + M_{T_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$M_{T_2 \circ T_1} = M_{T_2} + M_{T_1} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Contoh 4.17

Titik $A(6, –8)$ ditranslasikan dengan $T_1(–3, 2)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(–4, –1)$. Tentukan koordinat akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

$$A(6,-8) \xrightarrow{M_{T_2 \circ T_1}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{T_2} \circ M_{T_1} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{T_2} + M_{T_1} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Posisi akhir titik A menjadi $A''(–1, –7)$.

Masalah 4.7

Coba kamu amati cermin di tukang cukur (atau salon). Di depan kita ada cermin dan di belakang kita juga terdapat cermin. Jadi, kamu memiliki bayangan di cermin di depanmu dan di belakangmu, bukan? Jika kamu amati lebih lanjut, bayanganmu di cermin depan akan mempunyai bayangan juga di cermin belakang dan sebaliknya. Hal ini menunjukkan terjadi pencerminan bertahap dengan dirimu sebagai objek. Nah, ini akan melahirkan konsep komposisi refleksi. Mari kita turunkan formulanya secara umum.

Misalkan sembarang titik $A(x, y)$ direfleksikan dengan C_1 dilanjutkan dengan refleksi terhadap C_2 dimana matriks refleksi C_1 adalah $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan matriks refleksi C_2 adalah $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Dapatkah kamu menemukan konsep komposisi refleksi?

Alternatif Penyelesaian:

Dengan melakukan pencerminan bertahap maka:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_1} A'(x', y') \xrightarrow{C_2} A''(x'', y'')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{C_2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{dimana } M_{C_2} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{C_1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{dimana } M_{C_1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{C_1} M_{C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M_{C_1 \circ C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{dimana } M_{C_1 \circ C_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Proses di atas dapat dilihat pada skema berikut:

$$
\begin{tikzcd}
A'(x', y') \arrow[r, "C_2"] & A''(x'', y'') \\
A(x, y) \arrow[u, "C_1"] \arrow[ur, "(C_2 \circ C_1)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Skema 4.2: Komposisi Refleksi

Secara umum, matriks komposisi refleksi dituliskan sebagai berikut:

Jika matriks refleksi C_1 adalah $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan matriks refleksi C_2 adalah $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ maka matriks komposisi refleksi $C_1 \circ C_2$ atau $C_2 \circ C_1$ dituliskan,

$$M_{C_1} \circ M_{C_2} = M_{C_1} M_{C_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$M_{C_2} \circ M_{C_1} = M_{C_2} M_{C_1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Contoh 4.18

Garis $2x - 8y - 3 = 0$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_2$ di mana C_1 adalah cermin terhadap sumbu x dan C_2 adalah cermin terhadap garis $y = -x$. Tentukan persamaan bayangan garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis sehingga berdasarkan konsep komposisi refleksi yang telah ditemukan:

$$A(x, y) \xrightarrow{C_1 \circ C_2} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{C_1 \circ C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ dimana $\boldsymbol{M}_{C_1} \circ \boldsymbol{M}_{C_2}$ adalah matriks pencerminan $C_1 \circ C_2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{C_1} M_{C_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ dimana $\boldsymbol{M}_{C_1}$ dan $\boldsymbol{M}_{C_2}$ adalah matriks pencerminan C_1 dan C_2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks maka diperoleh $x = -x'$ dan $y = y'$ sehingga persamaan bayangan garis menjadi $2(-x) - 8(y) - 3 = 0$ atau $-2x - 8y - 3 = 0$.

Konsep komposisi translasi dan komposisi refleksi sama halnya dengan konsep komposisi rotasi dan komposisi dilatasi. Dengan menggunakan konsep komposisi fungsi maka komposisi rotasi atau komposisi dilatasi merupakan proses bertahap fungsi rotasi atau fungsi dilatasi.

Masalah 4.8

Misalkan titik $A(x, y)$ diputar dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut α_1 dilanjutkan rotasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan sudut α_2 menghasilkan bayangan $A''(x'', y'')$. Dapatkah kamu bangun formula komposisi rotasi?

Alternatif Penyelesaian:

Masalah ini adalah komposisi rotasi dengan pusat yang sama, yaitu di $O(0, 0)$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R_2\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

dengan mensubstitusi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ diperoleh,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R_2\left(R_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(R_2 \circ R_1\right)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2 + \alpha_1) & -\sin(\alpha_2 + \alpha_1) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \cos(\alpha_2 + \alpha_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perhatikan skema komposisi rotasi berikut!

$$\begin{tikzcd}
A'(x', y') \arrow[r, "R_{2(O,\,\beta)}"] & A''(x'', y'') \\
A(x, y) \arrow[u, "R_{1(O,\,\alpha)}"] \arrow[ur, "(R_{2(O,\,\beta)} \circ R_{1(O,\,\alpha)})"'] &
\end{tikzcd}$$

Skema 4.3 Komposisi rotasi

Dengan demikian, diperoleh formula untuk komposisi rotasi pada pusat putar O(0,0) sebagai berikut:

Jika $R_{1[O,\alpha_1]}$ dan $R_{2[O,\alpha_2]}$ adalah rotasi sebesar α_1 pada sudut $O(0, 0)$ dan rotasi sebesar α_2 pada sudut $O(0, 0)$ dengan maka matriks komposisi rotasi ditulis,

$$M_{\left(R_{[O,\alpha_1]} \circ R_{[O,\alpha_2]}\right)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2 + \alpha_1) & -\sin(\alpha_2 + \alpha_1) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \cos(\alpha_2 + \alpha_1) \end{pmatrix}$$

Contoh 4.19

Perhatikan contoh-contoh berikut!

Titik $A(a, b)$ dirotasi dengan $R_1 \circ R_2$ dimana R_1 adalah rotasi dengan sudut 180° berlawanan arah jarum jam pada pusat $O(0, 0)$ dan R_2 adalah rotasi dengan sudut 90° berlawanan arah jarum jam pada pusat $P(b, 2a)$. Tentukan posisi akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan konsep fungsi komposisi maka:

$$A(a, b) \xrightarrow{R_1 \circ R_2} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \circ M_{R_2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ dimana } M_{R_2} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-0 \\ b-0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] \text{ dimana } M_{R_1} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ 2a \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} b \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2b \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a-2b \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi akhir titik A tersebut adalah $A'(3b,3a)$.

Contoh 4.20

Garis $2x - y - 3 = 0$ dirotasi dengan $R_1 \circ R_1$ dimana R_1 adalah rotasi dengan sudut 90° berlawanan arah jarum jam pada pusat $P(1, 2)$. Tentukan persamaan posisi akhir garis tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik memenuhi garis tersebut sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{R_1 \circ R_1} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1\ R_1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dimana } M_{R_1} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{R_1} \begin{pmatrix} -y+3 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y+3-1 \\ x+1-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y+4 \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan matriks maka diperoleh $x = -x' + 2$ dan $y = -y' + 4$ sehingga persamaan garis menjadi $2(-x + 2) - (-y + 4) - 3 = 0$ atau $-2x + y - 3 = 0$.

Masalah 4.9

Misalkan titik $A(x, y)$ didilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala k_1 dilanjutkan dilatasi dengan pusat $O(0, 0)$ dan faktor skala k_2 diperoleh koordinat hasil dilatasi $A''(x'', y'')$. Dengan cara yang sama pada konsep komposisi pada transformasi sebelumnya, temukan konsep komposisi dilatasi pada pusat yang sama yaitu di $O(0, 0)$!

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = D_2\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = k_2\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

dengan mensubstitusi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ diperoleh,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = D_2\left(D_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = k_2k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(D_2 \circ D_1)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_2k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perhatikan skema!

$$\begin{tikzcd}
A'(x', y') \arrow[r, "D_{2[0,\, k_2]}"] & A''(x'', y'') \\
A(x, y) \arrow[u, "D_{1[0,\, k_1]}"] \arrow[ur, "D_{2[0,\, k_2]} \circ D_{1[0,\, k_1]}"'] &
\end{tikzcd}$$

Skema 4.4 Komposisi dilatasi

Dengan demikian, formula untuk komposisi dilatasi pada pusat $O(0, 0)$ adalah:

Jika titik $A(x, y)$ dirotasi berturut-turut oleh $D_{1[O,k_1]}$ dan $D_{2[O,k_2]}$ maka,

$$(D_2 \circ D_1)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = k_2k_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Contoh 4.21

Titik $A(3, 5)$ didilatasi dengan $D_1 \circ D_2$ dimana D_1 adalah dilatasi dengan faktor skala 3 pada pusat $O(0, 0)$ dan D_2 adalah dilatasi dengan faktor skala 2 pada pusat $P(2, 1)$.Tentukan koordinat akhir titik A tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep komposisi dilatasi, maka:

$$A(3, 5) \xrightarrow{D_1 \circ D_2} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1 \circ D_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1}\left[2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat akhir titik A tersebut adalah $A'(14, 28)$

Contoh 4.22

Jika D_k adalah dilatasi ke-k dengan faktor skala $\frac{k}{k+1}$ pada pusat $O(0, 0)$ maka tentukan dilatasi titik $A(-11, 55)$ oleh $D_1 \circ D_2 \circ D_3 \circ \ldots \circ D_{10}$.

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep komposisi dilatasi pada pusat yang sama maka:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1 \circ D_2 \circ D_3 \ldots \circ D_{10}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_{D_1} M_{D_2} M_{D_3} \ldots M_{D_{10}} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{2+1} \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{10+1} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, posisi akhir titik A tersebut setelah dilatasi adalah $A'(-1, 5)$.

Uji Kompetensi 4.3

1. Dengan konsep komposisi transformasi, tentukan koordinat titik A setelah ditranslasi berikut:
   a. Titik $A(1, -2)$ ditranslasikan dengan $T_1(-1, 12)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(-2, -10)$.
   b. Titik $B(1, 4)$ ditranslasikan dengan $T_1(-3, 2)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(4, 3)$, dilanjutkan lagi dengan translasi $T_3(-2, -3)$.
   c. Titik $C(1, 5)$ ditranslasikan dengan $T_2 \circ T_1$ dimana $T_1(3, 4)$ dan $T_2(4, -9)$.

d. Titik $D(-10, 25)$ ditranslasikan dengan $T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(-2, -4)$ dan $T_2(1, -5)$.
e. Titik $E(-1, 8)$ ditranslasikan dengan $T_2 \circ T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(2, -1)$ dan $T_2(-1, -2)$.

2. Dengan konsep komposisi transformasi, tentukan persamaan suatu objek setelah ditranslasi berikut:
   a. Garis $2x - 3y - 4 = 0$ ditranslasikan dengan $T_1(1, 2)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(2, -1)$.
   b. Garis $-3x - 5y + 15 = 0$ ditranslasikan dengan $T_1(3, 4)$ kemudian dilanjutkan dengan translasi $T_2(4, 5)$, dilanjutkan lagi dengan translasi $T_3(-5,-6)$.
   c. Garis $-x + 3y - 5 = 0$ ditranslasikan dengan $T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(-3, 2)$ dan $T_2(-2, 3)$.
   d. Parabola $y - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ ditranslasikan dengan $T_2 \circ T_1$ dimana $T_1(-2, -2)$ dan $T_2(1, -1)$.
   e. Parabola $2y = 2x^2 - 4x - 1$ ditranslasikan dengan $T_1 \circ T_1 \circ T_2$ dimana $T_1(2, -1)$ dan $T_2(-1, -2)$.

3. Jika C_1 adalah pencerminan terhadap titik $O(0, 0)$, C_2 adalah pencerminan terhadap sumbu x, C_3 adalah pencerminan terhadap sumbu y, C_4 adalah pencerminan terhadap garis $y = x$, dan C_5 adalah pencerminan terhadap garis $y = -x$ maka tentukan koordinat bayangan titik oleh komposisi pencerminan berikut:
   a. Titik $A(2, 2)$ dicerminkan dengan $C_2 \circ C_1$
   b. Titik $B(12, -2)$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_2$
   c. Titik $C(-4, 6)$ dicerminkan dengan $C_3 \circ C_4$
   d. Titik $D(-5, 9)$ dicerminkan dengan $C_5 \circ C_2 \circ C_3$
   e. Titik $E(-1, -3)$ dicerminkan dengan $C_4 \circ C_1 \circ C_5$

4. Jika C_1 adalah pencerminan terhadap titik $O(0, 0)$, C_2 adalah pencerminan terhadap sumbu x, C_3 adalah pencerminan terhadap sumbu y, C_4 adalah pencerminan terhadap garis $y = x$, dan C_5 adalah pencerminan terhadap garis $y = -x$ maka tentukan koordinat bayangan objek oleh komposisi pencerminan berikut:
   a. Garis $2x + 4y - 7 = 0$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_2$
   b. Garis $-x + 3y + 5 = 0$ dicerminkan dengan $C_3 \circ C_5$
   c. Garis $-3x + 2y + 6 = 0$ dicerminkan dengan $C_5 \circ C_5 \circ C_4$
   d. Parabola $y = -x^2 + 3x - 2$ dicerminkan dengan $C_1 \circ C_4$
   e. Parabola $-y + 2x^2 - 5x + 6 = 0$ dicerminkan dengan $C_2 \circ C_3 \circ C_4$

5. Jika R_1 adalah rotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O(0, 0)$, R_2 adalah rotasi sejauh 270° berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O(0, 0)$, R_3 adalah rotasi sejauh 180° searah jarum jam dengan pusat $P(1, -1)$, dan R_4 adalah rotasi sejauh 90° searah jarum jam dengan pusat $P(1, -1)$ maka tentukan posisi objek oleh komposisi rotasi berikut:
   a. Titik $A(2, -2)$ dirotasi dengan $R_1 \circ R_2$
   b. Titik $B(-8, 2)$ dirotasi dengan $R_2 \circ R_1$
   c. Titik $C(8, -6)$ dirotasi dengan $R_3 \circ R_4$
   d. Garis $-x + 9y - 3 = 0$ dirotasi dengan $R_2 \circ R_1$
   e. Parabola $2y = 2x^2 - 3x + 4$ dirotasi dengan $R_4 \circ R_3$

6. Temukan formula komposisi rotasi $R_1 \circ R_2$ terhadap titik $A(x, y)$ dimana adalah rotasi dengan sudut θ_1 dan pusat rotasi $P_1(a, b)$ dan R_2 adalah rotasi dengan sudut θ_2 dan pusat dilatasi $P_2(c, d)$.

7. Jika R_k adalah rotasi ke-k sejauh 90° searah jarum jam dengan masing-masing pada pusat $O(0, 0)$maka tentukan rotasi titik $A(-2, -4)$ oleh $R_1 \circ R_2 \circ R_3 \circ \ldots \circ R_{10}$.

8. Jika D_1 adalah dilatasi dengan faktor skala 2 pada pusat $O(0, 0)$, D_2 adalah dilatasi dengan faktor skala 3 pada pusat $O(0, 0)$, D_3 adalah dilatasi dengan faktor skala –2 pada pusat $P(-1, -1)$, dan D_4 adalah dilatasi dengan faktor skala 4 pada pusat $P(-1, -1)$ maka tentukan posisi objek oleh komposisi dilatasi berikut:
   a. Titik $A(12, -4)$ didilatasi dengan $D_1 \circ D_2$
   b. Titik $B(-3, 4)$ didilatasi dengan $D_3 \circ D_4$
   c. Titik $C(-1, 2)$ didilatasi dengan $D_1 \circ D_4$
   d. Garis $3x + 2y - 1 = 0$ didilatasi dengan $D_2 \circ D_1$
   e. Parabola $3y = 2x^2 - 1$ didilatasi dengan $D_4 \circ D_3$

9. Temukan formula komposisi dilatasi $D_1 \circ D_2$ terhadap titik $A(x, y)$ dimana D_1 adalah dilatasi dengan faktor skala k_1 dan pusat dilatasi $P_1(a, b)$ dan D_2 adalah dilatasi dengan faktor skala k_2 dan pusat dilatasi $P_2(c, d)$.

10. Jika D_k adalah dilatasi ke-k dengan faktor skala h pada pusat $P(1, -1)$ maka tentukan dilatasi titik $A(-2, -4)$ oleh $D_1 \circ D_2 \circ D_2 \circ . . . \circ D_{10}$.

D. Penutup

Setelah kita membahas materi transformasi, kita membuat kesimpulan sebagai hasil pengamatan pada berbagai konsep dan aturan transformasi sebagai berikut:

1. Transformasi yang dikaji terdiri dari translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran) dan dilatasi (perkalian) serta komposisinya.
2. Matriks transformasi yang diperoleh adalah:

No.	Transformasi	Matriks Transformasi
1.	Translasi $T(a, b)$	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2.	Refleksi Titik $O(0, 0)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3.	Refleksi Sumbu x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4.	Refleksi Sumbu y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.	Refleksi Garis $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6.	Refleksi Garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7.	Rotasi sebesar sudut α	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
8.	Dilatasi $[k,P(a,b)]$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

9	M_T : Matriks Translasi	$M_{T_2 \circ T_1} = M_{T_2} + M_{T_1}$
10	M_T : Matriks Transformasi	$M_{T_2 \circ T_1} = M_{T_2} M_{T_1}$

3. Transformasi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

   Translasi

   Bangun yang digeser (translasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

   Refleksi

   Bangun yang dicerminkan (refleksi) dengan cermin datar tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran. Jarak bangun dengan cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.

   Rotasi

   Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

   Dilatasi

   Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

   ❖ Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
   ❖ Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.
   ❖ Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
   ❖ Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
   ❖ Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
   ❖ Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.